ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛ.

Διάλεξη 6η
09/12/2019

Πρόταση: Κάθε κύκλος ο οποίος διέρχεται από 2 αντίστροφα σημεία (ως προς κάποια αντιστροφή) τέμνει τον κύκλο αντιστροφής ορθογώνια και μένει αναλλοίωτος ως προς την αντιστροφή.

Αντίστροφα κάθε κύκλος K ο οποίος μένει αναλλοίωτος ως προς αντιστροφή C, τέμνει τον C ορθογώνια.

Πόρισμα: Έστω κ_1, κ_2 ορθογώνιοι $\Rightarrow \kappa_1 \xmapsto{\kappa_2} \kappa_1$ και $\kappa_2 \xmapsto{\kappa_2} \kappa_2$ (καλό για Σ-Λ) ⇝ αυτό θα προσπαθούμε να δούμε εφαρμογή.

Ορισμός: (ομοιοθεσία)

Ορίζουμε την ομοιοθεσία $(\Phi_{O,\lambda})$, όπου O: σταθερό σημείο και $\lambda \neq 0$ $(\lambda > 0)$, τον γεωμετρικό μετασχηματισμό, ο οποίος απεικονίζει το O στον εαυτό του και κάθε άλλο σημείο A του επιπέδου σε σημείο A': $OA' = \lambda \cdot OA$.
(τα A, A', O: συνευθειακά)

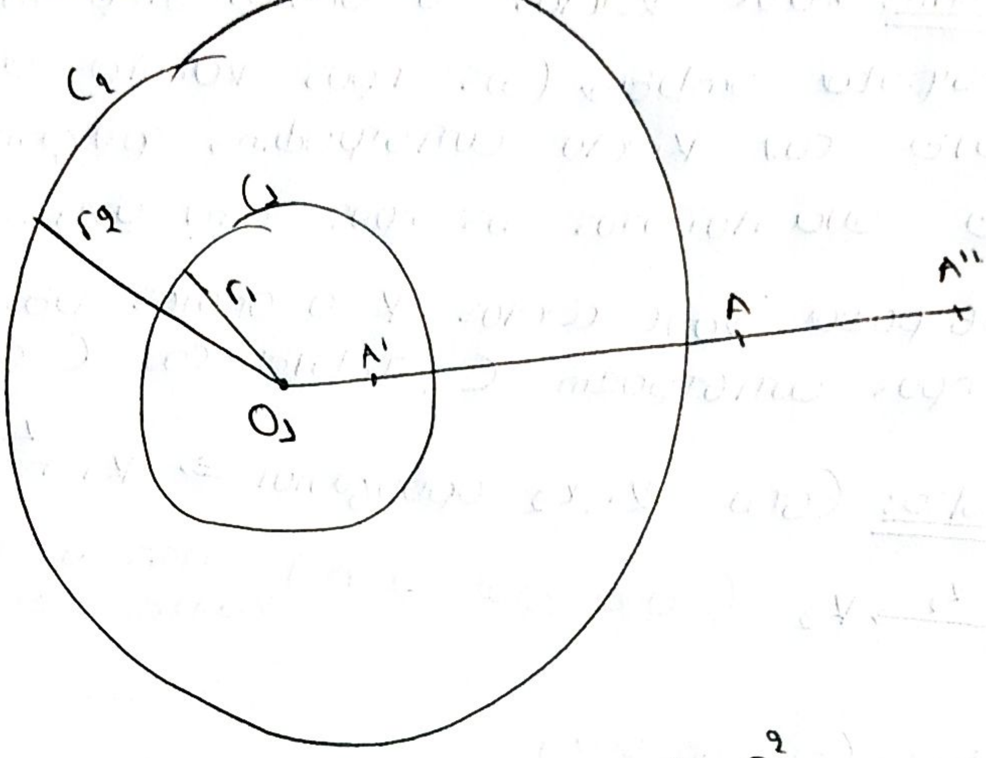
Ιδιότητες: ① Η ομοιοθεσία διατηρεί γωνίες.
Η ομοιοθεσία απεικονίζει ευθ. τμήματα $\longmapsto$ ευθ. τμήματα.

② Η ομοιοθεσία
$(|AB| = \lambda |A'B'|)$

③ Απεικονίζει πολύγωνα $\longmapsto$ όμοια πολύγωνα.

④ Έστω η ομοιοθεσία $\Phi_{O,\lambda}$. Η Φ απεικονίζει έναν κύκλο C ακτίνας ρ σε έναν άλλο κύκλο C' ακτίνας ρ', όπου $\rho' = |\lambda| \rho$ και το κέντρο του C' είναι η ομοιοθετική εικόνα του κέντρου του C.

Εφαρμογή: Η σύνθεση δύο αντιστροφών με ίδιο κέντρο αντιστροφής είναι ομοιοθεσία.



$$\left.\begin{array}{l} A' \longmapsto A \\ A \xrightarrow{C_1} A' \\ A' \xrightarrow{C_2} A'' \end{array}\right\} \underbrace{(OA)(OA') = r_1^2}_{\text{σχέση } (1)} \text{ με } \underbrace{(OA')(OA'') = r_2^2}_{\text{σχέση: } (2)} :$$

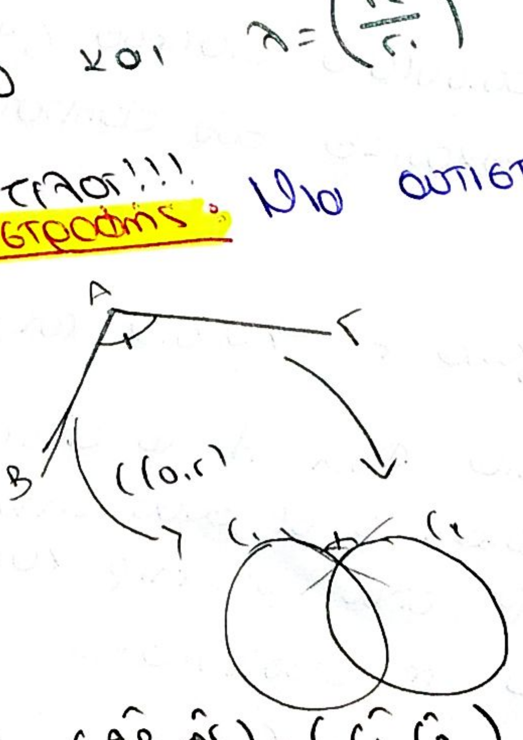
$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{OA'' \cdot OA'}{OA \cdot OA'} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow OA'' = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot OA$$

: ομοιοθεσία κέντρου O και $\lambda = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$

SOS: για τέλος!!!

Ιδιότητα αντιστροφής: Μια αντιστροφή διατηρεί γωνίες

π.χ



$AB \to C_1$

$A\Gamma \to C_2$

από ιδιότητα: $(\hat{AB}, \hat{A\Gamma}) = (\hat{C_1}, \hat{C_2})$ και αντιστροφή

Πρόταση: Έστω αντιστροφή $C(O,r)$

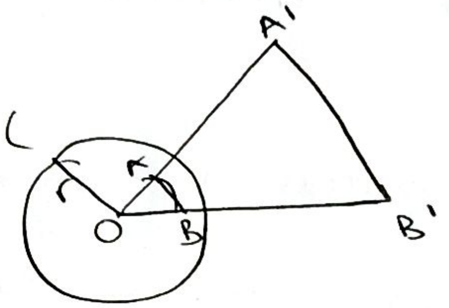
(Τύπος απόστασης αντίστροφων σημείων)

Έστω A, B σημεία με A', B' τα αντίστροφα αυτών.

Ισχύει ότι

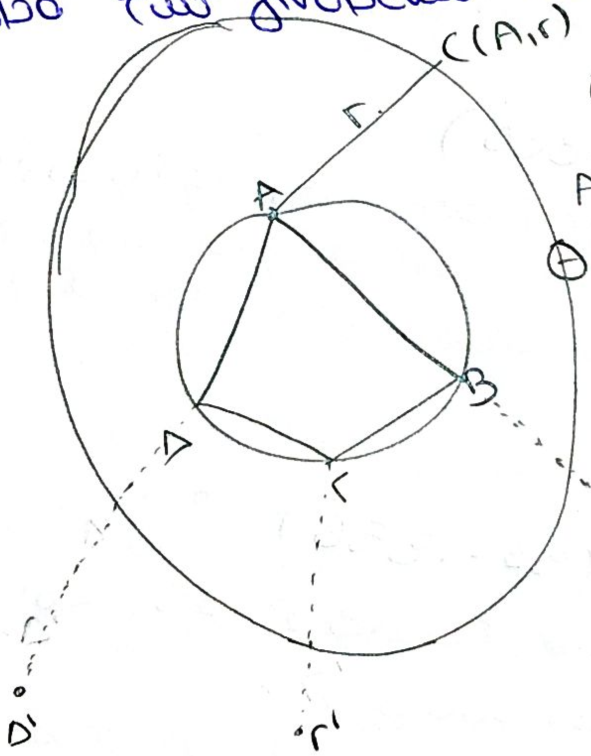
$$\boxed{A'B' = \frac{AB\, r^2}{OA \cdot OB}}$$

Το χρησ. χωρίς απόδ.



Εφαρμογή: (Θ. Πτολεμαίου)

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγρ. σε κύκλο. Ισχύει ότι το γινόμενο των διαγωνίων του τετρ. ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών.



Θα δείξω ότι

$A\Gamma \cdot B\Delta = AB\Gamma\Delta + B\Gamma\, A\Delta$.

Θεωρώ τυχαία αντιστροφή κύκλου αντιστροφής $C(A,r)$, όπου r: τυχαία ακτίνα.

Παρατηρούμε ότι τα B', Γ', Δ' είναι συνευθειακά διότι η $C(A,r)$ απεικονίζει κύκλο που διέρχεται από το A $\longmapsto$ ευθεία

Ισχύει $B'Δ' = B'Γ' + Γ'Δ'$.

(*) Βοήθεια του τύπου στην προηγούμενη πρόταση:

$$\frac{BΔ\cdot r^2}{(AB)(AΔ)} = \frac{BΓ\cdot r^2}{(AB)(AΓ)} + \frac{ΓΔ\cdot r^2}{(AΓ)(AΔ)}$$

=> κάνω πράξεις και βγαίνει το ζητούμενο.

Υπερβολική Γεωμετρία.

→ (Gauss 1777-1855)
φαίνεται ότι την γνώριζε από το 1816. Λόγω αυστηρών αποτελεσμάτων δεν δημοσίευσε τίποτα.

→ Bolyai (1802-1860)
Το 1823 ανακαλύπτει την υπερβολική γεωμ. Διστάζει και ο ίδιος να δημοσιεύσει, αλλά έχει κερδίσει τον θαυμασμό και την αναγνώριση από τον Gauss.

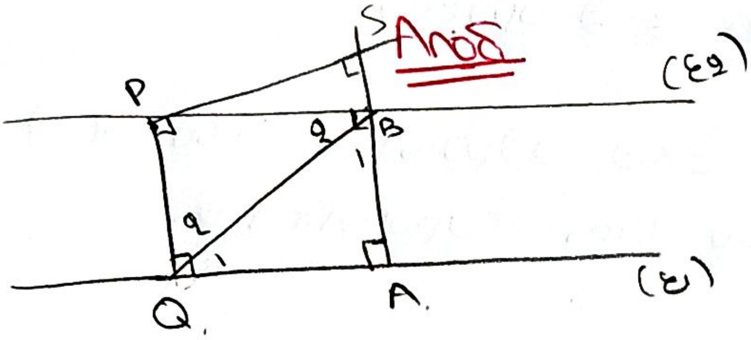
→ Lobachevsky (1792-1856)
Ανακάλυψε την ίδια το 1823-25 και περίπου 1829 δημοσίευσε.
Ο Lob. κατέληξε στο ότι το 5ο αι. του Ευκλ. είναι αξίωμα και το αντικατέστησε με το ότι:

"Υπάρχει ευθεία (ε) και σημείο Α εκτός αυτής έτσι ώστε να μπορώ να περάσω τουλ. 2 ευθείες (στο ίδιο επίπεδο με ε) οι οποίες είναι παράλληλες με (ε)"

Προφανώς όλες οι προτάσεις της απόλυτης γεωμ. ισχύουν και στην γεωμετρική.

Θεώρημα: Στην υπερβολική γεωμετρία, για κάθε ευθεία (ε) και σημείο Α εκτός αυτής, διέρχονται τουλάχιστον 2 ευθείες παράλληλες προς την (ε).

Απόδ



Έστω ευθεία (ε1) και σημείο Q αυτής. Στην απόλυτη γεωμ. είδαμε ότι υπάρχει μοναδική κάθετη στην (ε1) στο Q. Αντίστοιχα θεωρώ την (ε2) με $\varepsilon_2 \perp PQ$. Από πρόταση απόλ. γεωμ. είδαμε ότι 2 ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες $\Longrightarrow (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$

Έστω $A \in (\varepsilon_1)$ με $A \neq Q$ και φέρω ομοίως την μοναδική κάθετη στην (ε_1) που διέρχεται από το A.
Έστω s κάθετη στην (ε_1).
Από απόλυτη γεωμετρία φέρω την κάθετη από το P στην (s).

Ισχυρισμός: $PB \neq (\varepsilon_2)$.

Αν αποδειχθεί ο ισχυρισμός έχουμε τελειώσει γιατί οι PB, QA είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, άρα από απόλυτη γεωμ. $PB \parallel QA$, άρα "τουλ. 2 παράλληλες"

Έστω αντίθετα ότι $PB = \varepsilon_2$, άρα $B = B'$

Στο ΡΑΒΩ φέρω την διαγώνιο ΒΩ.

Παρατηρώ ότι $\hat{P} + \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{\Omega}_1 + \hat{\Omega}_2 = 4L \Rightarrow$

$(\hat{P} + \hat{B} + \hat{\Omega}_2) + (\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{\Omega}_1) = 4L$, όμως

άρα $\hat{P} + \hat{B}_2 + \hat{\Omega}_2 \leq 2$ ορθές $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ το άθροισμα ≤ 2 ορθ.

$\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{\Omega}_1 \leq 2$ ορθές

άρα τα τρίγωνα έχει άθροισμα ίσο με 2 ορθές.
$\Rightarrow$ ισχύει το αξίωμα της παραλληλίας

(Άτοπο)

και έτσι αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Θεώρημα: Στην υπερβολική γεωμετρία, δύο όμοια τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδ.

Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \simeq \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'} \Longleftrightarrow \hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma'}$

Έστω ότι $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \neq \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$, θα καταλήξω σε άτοπο.
Άρα ισχύει ότι $AB \neq A'B'$ και $A\Gamma \neq A'\Gamma'$ και $B\Gamma \neq B'\Gamma'$
Άρα ισχύει ότι $AB \neq A'B'$ και $A\Gamma \neq A'\Gamma'$ (ΠΓΠ) το οποίο διαφορετικό θα εφαρμόζοταν το (ΠΓΠ) το οποίο διαφορετικά θα ήταν άτοπο στην ισότητα τριγώνων
θα ήταν άτοπο στην ισότητα τριγώνων.
Έστω $AB < A'B'$ και $A\Gamma > A'\Gamma'$ και

Άρα θα έχω ότι $AB < A'B'$ και

$B\Gamma < B'\Gamma'$.

ΧΒγ Το $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ έχει 2 πλευρές μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$. Άρα ΧΒγ υποθέτω ότι $ΑΒ > Α'Β'$ και $ΑΓ > Α'Γ'$.

Από ($Ι_1$) υπάρχουν σημεία $Β''$, $Γ''$ στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε $ΑΒ'' = Α'Β'$ και $ΑΓ'' = Α'Γ'$

Παρατηρώ ότι $\overset{\triangle}{ΑΒ''Γ''} = \overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$ $\left\{ \begin{array}{l} (*) \quad (ΠΓΠ) \\ \hat{Α} = \hat{Α'} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow (*') \left\{ \begin{array}{l} \hat{Β}_1'' = \hat{Β}' = \hat{Β} \\ \hat{Γ}_1'' = \hat{Γ}' = \hat{Γ} \end{array} \right.$$

Παρατηρώ ότι $(*'') \left\{ \begin{array}{l} \hat{Β}_2'' = 2L - \hat{Β}_1'' \\ \hat{Γ}_2'' = 2L - \hat{Γ}_1'' \end{array} \right. \xRightarrow{(*')}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Β}_2'' = 2L - \hat{Β} \\ \hat{Γ}_2'' = 2L - \hat{Γ} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{Β} + \hat{Β}_2'' = 2L \\ \hat{Γ} + \hat{Γ}_2'' = 2L \end{array} \right.$$

Όμως στο τετράπλευρο ΒΒ''Γ''Γ έχω άθροισμα γωνιών 4 ορθών (άτοπο, βλ. $\underbrace{\text{προηγ. αποδ}}_{\text{συμβιβ. όπως στην προηγ. αποδ}}$)

και έπεται το ζητούμενο

Θεώρημα: Στην υπερβολική γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 2 ορθών $(=\pi)$

Ορισμός: Ορίζουμε ως έλλειμμα ενός τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ την διαφορά του αθροίσματος των γωνιών του από το (π).
(συμβολισμός: $\delta(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$, $\delta(\overset{\triangle}{AB\Gamma}) = \pi - (\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma})$)

Παρατηρήσεις: ① Στην ευκλείδεια γεωμ. $\delta(\overset{\triangle}{AB\Gamma})=0$, $\forall \overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

② Στην υπερβολική γεωμ. ισχύει: $0<\delta(\overset{\triangle}{AB\Gamma})<\pi$.

③ Αν ένα τρίγωνο χωριστεί σε δύο άλλα $\overset{\triangle}{A_1B_1\Gamma_1}$, $\overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma_2}$ $\Rightarrow \delta(\overset{\triangle}{AB\Gamma}) = \delta(\overset{\triangle}{A_1B_1\Gamma_1}) + \delta(\overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma_2})$

Θεώρημα: Αν για 2 τρίγωνα έχουμε:

$\delta(\overset{\triangle}{AB\Gamma}) = \delta(\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}) \Longrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

Θεώρημα: Έστω τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$, τότε

$\dfrac{\alpha(\overset{\triangle}{AB\Gamma})}{\delta(\overset{\triangle}{AB\Gamma})} = \dfrac{\alpha(\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'})}{\delta(\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'})}$, όπου $\alpha(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$, $\alpha(\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'})$ τα εμβαδά των $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ αντίστοιχα

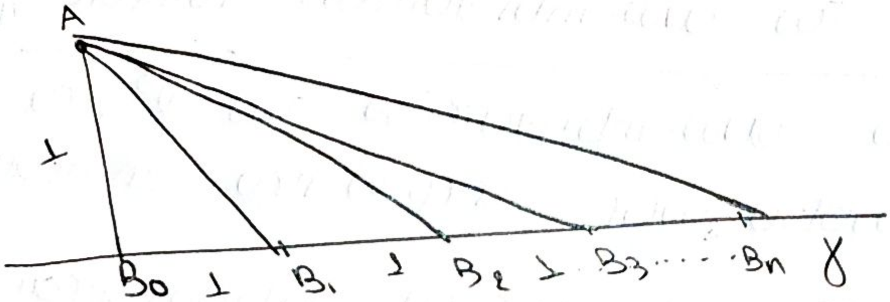
<u>Παρατήρηση</u>: Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι ανάλογο του ελλείμματος του, δηλαδή

$\alpha(A\overset{\Delta}{B}\Gamma) = K\delta(A\overset{\Delta}{B}\Gamma)$, $K>0$.

Το εμβαδό τριγώνου αυξάνεται όσο μειώνεται το άθροισμα των γωνιών του

<u>Θεώρημα</u>: Στην υπερβολική γεωμετρία, υπάρχουν τρίγωνα με ίδια βάση, ίδιο ύψος και διαφορετικά εμβαδά.

<u>Απόδ</u>



Θεωρώ ευθεία γ . σημείο B_0 αυτής και φέρω από σημείο Α εκτός αυτής την προβολή στο B_0.

$AB_0 = 1$. Στα δεξιά του B_0 και στην ευθεία g. θεωρώ ακολουθία σημείων B_1, B_2, B_3 (από 1⊥)

Άρα κατασκευάσαμε ακολουθία τριγώνων $A\overset{\Delta}{B_i}B_{i+1}$ και ίδιο που έχουν όλα την ίδια βάση (=1) και ίδιο ύψος ($AB_0=1$). Θέλω είναι αδύνατο <u>ΟΛΑ</u> αυτά τα τρίγωνα να έχουν ίδιο εμβαδό.

Έστω αντίθετα ότι $\alpha(A\overset{\Delta}{B_i}B_{i+1})$ είναι ίδιο $\forall i=0,1,\ldots$

$\Rightarrow$ έχουν ίσα ελλείμματα $\Rightarrow \delta(\overset{\Delta}{A}B_0B_1) = \delta(A\overset{\Delta}{B_1}B_2)$

$= \ldots = \delta(AB_{n-1}B_n)$

Παρατηρώ ότι $\delta(A\overset{\triangle}{B_0}B_n) = \delta(A\overset{\triangle}{B_0}B_1) + \delta(A\overset{\triangle}{B_1}B_2) + \dots +$
$\delta(A\overset{\triangle}{B_{n-1}}B_n) = n\,\delta(AB_iB_{i+1})$, για κάποιο i.

άρα $\underbrace{n\,\delta(A\overset{\triangle}{B_0}B_n) < \pi}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

το οποίο είναι άτοπο στην Αρχιμήδεια ιδιότητα, καθώς $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n\alpha > \beta$

$\Downarrow$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

"Το μοντέλο του άνω-ημιεπιπέδου Poincaré"

(από εδώ και κάτω 4 μονάδες)

Ορίζεται στο άνω-ημιεπίπεδο του $\mathbb{R}^2$, το οποίο το ονομάζουμε υπερβολικό επίπεδο.

Συμβολισμός: Το Y-επίπεδο, συμβολίζεται ως

$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ γραφικά:

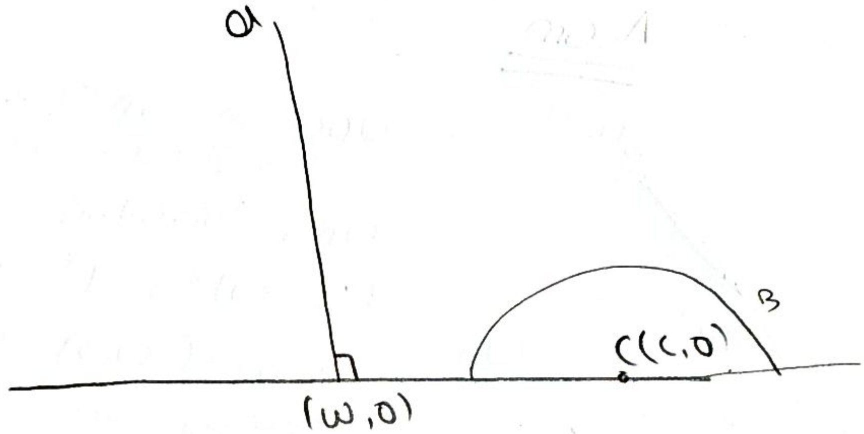
Ο άξονας αυτός καλείται ορίζοντας.

Τα σημεία του ορίζοντα, δεν λαμβάνονται ως σημεία του Y-επιπέδου.
(σημεία στο ∞ ή κατ' εξοχήν σημεία).

Υ-ευθείες :

α) Οι ευθείες που είναι κάθετες στον ορίζοντα (άξονα $x'x$)
μορφή : $x=\omega$.

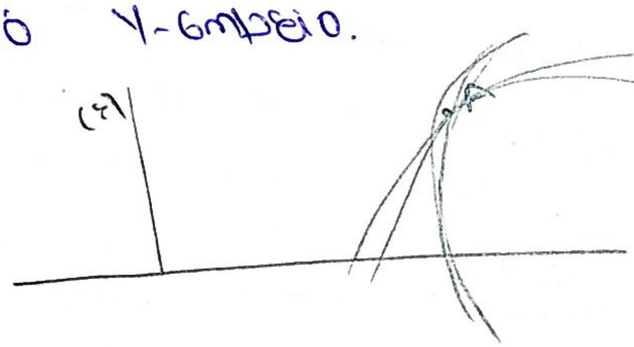
β) ημικύκλιο με κέντρο ένα κατ' εκδοχή σημείο
μορφή : $(x-c)^2 - y^2 = r^2$, $y>0$



Ορισμός: α) Δύο Υ-ευθείες θα λέμε ότι τέμνονται αν υπάρχει Υ-σημείο που ικανοποιεί τις εξισώσεις αυτών.

β) Δύο Υ-ευθείες λέγονται παράλληλες αν δεν έχουν κοινό Υ-σημείο.

Π.χ.



← Μπορώ να φέρω άπειρες παράλληλες προς την (ε) (αν αλλάζω ακτίνα σε κάθε κέντρο φέρω άπειρες)

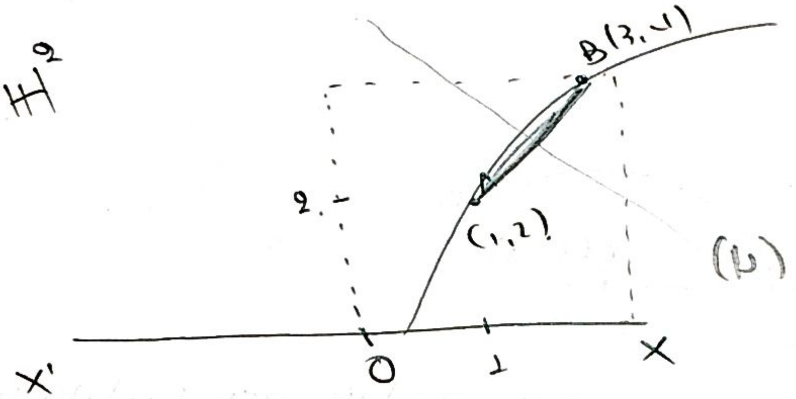
γ) Γωνία δύο Υ-ευθειών (*) είναι η γωνία που σχηματίζουν οι 2 Υ-ευθείες. (πρέπει να μην είναι παράλληλες)

(*) τεμνόμενων Υ-ευθειών

(*) Θέλω εφαπτόμενη στο σημείο τομής (μία ή 2) και η γωνία ορίζεται ως η γωνία αυτών.
(Θα πρέπει να υπολογίσω γωνία)

Εφαρμογή: 2ος Να βρεθεί η Υ-ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B(3,4).

Λύση



άρα η ζητούμενη ευθεία είναι της μορφής $(x-x_0)^2+y^2=r^2$ όπου $(x_0,0)$ το κέντρο του κύκλου που ανήκουν τα A, B και η ακτίνα του.

$$\left.\begin{aligned} A\in Y_1 &\overset{\text{από}}{\Rightarrow} (1-x_0)^2+2^2=r^2 \\ B\in Y_1 &\Rightarrow (3-x_0)^2+4^2=r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0=5$$

Την ακτίνα μπορώ να την βρω είτε από οποιοδήποτε σημείο A (ή B) από $x_0=5$ ή απόσταση στο κέντρο $x_0=5$ και λύνω ως προς (r).